

Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
Муниципальный тур 2012 года

7 класс

1. На столе стоят кофейник с кофе и молочник с молоком. Вся семья выпила по полной чашке кофе с молоком (чашки одинаковые), после чего кофейник и молочник остались пустыми. При этом Катя выпила $1/4$ всего молока и $1/6$ всего кофе. Сколько человек в семье?

Решение. На всех остальных членов семьи осталось $3/4$ всего молока и $5/6$ всего кофе. $3/4$ всего молока и $3/6$ всего кофе заполняют 3 чашки, а оставшиеся $2/6$ всего кофе должны заполнять целое число чашек. Это число равняется 1, потому что если бы оно было не менее двух, то $1/6$ всего кофе заполняли бы не менее одной чашки, то есть Кате не досталось бы молока вовсе.

Ответ. 5

2. Если 777 умножить на 429, то получится 333333. На что нужно умножить 777, чтобы получить шестизначное число, записанное одними четверками?

Решение. Очевидно, шестизначное число, записанное одними четверками, получится, если 333333 поделить на 3 и умножить на 4. Поэтому 777 нужно умножить на число $(429 : 3) \cdot 4 = 572$.

Ответ. 572

3. Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, 376 кг, ..., 468 кг, на семи трехтонных грузовиках?

Решение. Так как грузовиков 7, а камней 50, то на каком-то грузовике нужно будет увезти не менее 8 камней. Однако сумма восьми самых легких камней $370 + 372 + \dots + 384 = 3016$, что больше трех тонн.

Ответ. Нет

4. Представьте число 11112222 в виде произведения двух четырехзначных чисел.

Решение. $11112222 = 1111 \cdot 10000 + 2222 = 1111 \cdot (10000 + 2) = 1111 \cdot 10002 = 1111 \cdot 3 \cdot 3334 = 3333 \cdot 3334$.

5. Нарисуйте какую-нибудь фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

Решение. Примером такой фигуры может служить известный символ инь (или ян), то есть полукруг радиуса 1, из которого вырезан в два раза меньший полукруг с диаметром на одном из ограничивающих большой полукруг радиусов, который затем приклеен вдоль второго из ограничивающих большой полукруг радиусов.

8 класс

1. Натуральное число увеличили в два раза. Может ли его сумма цифр уменьшиться в два раза? Если да, то приведите пример.

Ответ. Может, например 6 и 12.

3. В треугольнике $\triangle ABC$ угол C прямой. Из центра C радиусом AC описана дуга окружности, пересекающая гипотенузу в точке D , а катет CB в точке E . Найдите углы $\angle ACD$ и $\angle DCE$, если $\angle B = 40^\circ$.

Решение. По условию $\angle A = 50^\circ$, а треугольник $\triangle CAD$ равнобедренный. Поэтому угол ACD равен $180^\circ - 2\angle A = 80^\circ$, а угол DCE равен $90^\circ - 80^\circ = 10^\circ$.

Ответ. 80° и 10° .

3. На разделочной доске лежат один круглый и один квадратный блин. Всегда ли (независимо от их взаимного расположения) можно провести один прямолинейный разрез, рассекающий каждый из них на две равные части?

Решение. Любая прямая, проходящая через центр квадрата, рассекает его на две равных части (докажите это). То же верно для круга. Поэтому достаточно провести разрез вдоль прямой, соединяющей центры блинов.

Ответ. Можно.

4. После окончания учебного года Миша решил вырвать из своего учебника математики все листы, на каждом из которых сумма номеров страниц (на обеих сторонах листа) является квадратом целого числа. Сколько листов он вырвал, если в учебнике 240 листов?

Решение. На каждом листе две страницы, причем меньший из номеров страниц нечетен, а больший четен. Если нечетный номер есть $2n + 1$, то четный равен $2n + 2$, и их сумма $4n + 3$ имеет остаток 3 при делении на 4. Но такое число не может быть квадратом целого числа (доказать).

Ответ. Он не вырвал ни одного листа.

5. Найдите два таких трехзначных числа x и y , что сумма всех остальных трехзначных чисел равна $600x$.

Решение. Сумма всех трехзначных чисел равна $(100 + 999) \cdot 450 = 494550$ (разбиваем на 450 пар равноудаленных от концов чисел). По условию $494550 - x - y = 600x$, откуда $x = 822 + \frac{528 - y}{601}$. Поскольку x — натуральное, то $528 - y$ делится на 601. Для трехзначного y это возможно только при $y = 528$ и, значит, $x = 822$.

Ответ. $x = 822, y = 528$.

9 класс

1. На доске записаны числа 1, 2, 4, 8, 16, 32. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность — неотрицательное число. Может ли на доске в результате нескольких таких операций остаться только число 13?

Решение. Да, может. Искомая последовательность операций видна из следующей записи: $13 = 32 - 16 - (8 - 4 - (2 - 1))$.

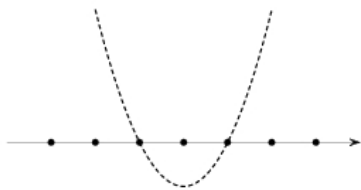
2. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором число $n(n + 1)(n + 2)$ делится на 2012.

Решение. $2012 = 4 \cdot 503$. Поскольку число 503 — простое, один из множителей

должен делиться на него. Но тогда этот множитель не меньше, чем 503. Наименьшее возможное n получается, если $n+2 = 503$, тогда $n = 501$, но $501 \cdot 502 \cdot 503$ не делится на 4. Следующая возможность $n+1 = 503$, $n = 502$. Поскольку $502 \cdot 503 \cdot 504$ делится на 4, оно подходит.

Ответ. $n = 502$.

3. На рисунке изображен график квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ (ось ординат стерлась, расстояние между отмеченными точками оси абсцисс равно 1). Найти дискриминант этого трехчлена.



Решение. По формуле корней приведенного квадратного уравнения $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$. Отсюда $D = (x_2 - x_1)^2 = 4$.

Ответ. 4.

4. Один из углов равнобедренного треугольника равен 120° . Из середины основания опущен перпендикуляр на боковую сторону. В каком отношении основание перпендикуляра делит боковую сторону?

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB = AC$, тогда $\angle BAC = 120^\circ$. Обозначим следующие точки: M — середину BC , K — основание перпендикуляра, опущенного из точки A на сторону BC . Так как $\angle AMK = \angle ABM = 30^\circ$, то $AM = AB/2$, $AK = AM/2$, то есть $AK = AB/4$. Следовательно, $BK/KA = 3$.

Ответ. $3 : 1$, считая от вершины основания.

5. От двух кусков сплава серебра с золотом (с различным содержанием золота) массой в 6 и 12 кг отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавляли с остатком другого куска, после чего процентное содержание золота в обоих сплавах стало одинаковым. Каковы массы каждого из отрезанных кусков?

Решение. Обозначим через p и q первоначальные доли золота в первом и втором кусках соответственно, а через x массу отрезанного куска. Тогда доля золота в сплаве отрезанной части первого куска с остатком второго равна $\frac{xp + (12-x)q}{12}$, а в сплаве отрезанной части второго куска с остатком первого $\frac{xq + (6-x)p}{6}$. Приравнявая эти доли получаем $3x(p - q) = 12(p - q)$. По условию $p \neq q$, так что $x = 4$.

Ответ. 4 кг.

10 класс

1. Существуют ли целые числа x , y и z такие, что $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3 = 2012$?

Решение 1. При возведении целого числа в куб остаток при делении на 3 сохраняется. Поэтому остатки от деления на 3 чисел $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ и $(x-y) + (y-z) + (z-x) = 0$ одинаковы, т.е. оба они делятся на 3. Но число 2012 на 3 не делится.

Решение 2. Раскроем скобки и получим $-3x^2y + 3xy^2 - 3y^2z + 3yz^2 - 3z^2x + 3zx^2$. Это число делится на 3, а 2012 не делится.

Ответ. Нет.

2. Первая и вторая цифры двухзначного числа N являются первым и вторым членом некоторой геометрической прогрессии, а само число N втрое больше третьего члена той же прогрессии. Найдите все такие числа N .

Решение. Имеем $N = 10a + aq = 3aq^2$, откуда $3q^2 = q + 10$, $q_1 = 2$, $q_2 = -5/3$. Следовательно, знаменатель прогрессии равен 2. Поскольку первые ее два члена — это цифры, то $aq \leq 9$. Отсюда $a = 1, 2, 3, 4$.

Ответ. 12, 24, 36, 48.

3. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в двух точках с абсциссами x_1 и x_2 , а ось абсцисс в точке с абсциссой x_3 . Докажите, что $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_3}$.

Решение. Поскольку прямая пересекает график в двух точках, то она не является вертикальной и имеет уравнение вида $y = kx + b$. Тогда x_1 и x_2 есть корни квадратного уравнения $x^2 - kx - b = 0$ и по теореме Виета $x_1 + x_2 = k$, $x_1x_2 = -b$. Отсюда $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} = -\frac{k}{b}$. Но x_3 есть корень уравнения $kx + b = 0$, то есть $x_3 = -\frac{b}{k}$.

4. На плоскости проведена окружность с центром O радиуса 1. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

Решение. Пусть 2ϕ — угол, под которым из точки O видна сторона квадрата с вершинами на окружности, r — расстояние от центра окружности до вершин квадрата, не лежащих на окружности. Тогда $r^2 = \sin^2 \phi + (\cos \phi + 2 \sin \phi)^2 = 1 + 2 \sin 2\phi + 4 \sin^2 \phi = 3 + 2(\sin 2\phi - \cos 2\phi) = 3 + 2\sqrt{2} \sin(2\phi - \frac{\pi}{4}) \leq 3 + 2\sqrt{2}$, причем наибольшее значение r^2 достигается при $\phi = \frac{3\pi}{8}$ и равно $3 + 2\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})^2$.

Ответ. $1 + \sqrt{2}$

5. Какое наибольшее количество белых и черных ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы любая белая ладья не была никакой ладью по горизонтали, а любая черная ладья не была никакой ладью по вертикали?

Решение. Заметим, что если в какой-то горизонтали стоит белая ладья, то никаких других ладей в этой горизонтали стоять не может. Следовательно, белых ладей не может быть более восьми. Если черных ладей на доске нет, то всего ладей не более восьми. Если же на доске есть хотя бы одна черная ладья, то на одной горизонтали с ней белых ладей быть не может, значит, в этом случае, белых ладей не более, чем 7. Рассуждая аналогично про вертикали, получим, что и черных ладей не более, чем 7. Таким образом, всего ладей на доске не более, чем 14. Осталось построить пример расстановки 14 ладей. Можно расставить 7 черных ладей во всех клетках первой горизонтали, кроме первой, и 7 белых ладей во всех клетках первой вертикали, кроме той клетки, которая лежит на пересечении первой вертикали и первой горизонтали.

Ответ. 14

11 класс

1. Найдите все целые решения неравенства $x^2 < 3 - 2 \sin 5x$.

Решение. Правая часть неравенства не превосходит 5. Отсюда $|x| < \sqrt{5}$. Из целых чисел этому условию удовлетворяют 0, ± 1 и ± 2 . Очевидно, числа 0 и ± 1 удовлетворяют неравенству. Осталось проверить числа ± 2 , то есть выяснить, выполняются ли неравенства $\sin 10 < -\frac{1}{2}$ (при $x = 2$) и $\sin 10 > \frac{1}{2}$ (при $x = -2$). Но $10 = 3\pi + \beta$, где $\frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{4}$, то есть $\sin 10 = -\sin \beta < -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, то есть первое из этих неравенств выполнено, а второе нет.

Ответ. $-1, 0, 1, 2$.

2. Натуральное число увеличили в три раза. Может ли сумма его цифр при этом уменьшиться более чем в три раза? Если да, то приведите пример.

Ответ. Может. Например, 334 и 1002.

3. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K , для которой $CK = BC$. Отрезок CK пересекает биссектрису AL в её середине. Найдите углы треугольника ABC .

Решение. Обозначим точку пересечения отрезков CK и AL за O . Заметим, что CO — медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника ACL . Значит, $AO = OC = OL$, а $\angle OCA = \angle OAC = \angle OAK$ (последнее равенство верно, так как AO — биссектриса). Обозначим этот угол за α . Тогда $\angle A = 2\alpha$.

Имеем $\angle CKB = \angle CBK = 90^\circ - 2\alpha$. Отсюда смежный угол $\angle CKA = 180 - (90^\circ - 2\alpha) = 90^\circ + 2\alpha$. Сумма углов в треугольнике AKC равна $2\alpha + \alpha + 90^\circ + 2\alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = 18^\circ$, и $\angle A = 36^\circ$, $\angle B = 54^\circ$.

4. На гранях 8 одинаковых кубиков имеются кляксы: по одной кляксе на двух противоположных гранях, по две на других двух противоположных гранях, и по три кляксы на оставшихся двух гранях каждого кубика. Из этих 8 кубиков сложили куб $2 \times 2 \times 2$. Может ли оказаться, что числа клякс на гранях этого куба образуют шестерку последовательных натуральных чисел?

Решение. Допустим, что это возможно. На гранях каждого малого куба 12 клякс, так что всего их 96. Из каждой пары противоположных граней каждого малого куба одна грань окажется на поверхности большого куба, а вторая внутри его. Поэтому на поверхности большого куба окажется ровно половина всех клякс, то есть 48. Но среди 6 последовательных натуральных чисел всегда есть 3 нечетных, так что их сумма нечетна и не может равняться 48.

Ответ. Нет.

5. Найдите пятую цифру после запятой в десятичной записи следующей суммы

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{9}{10!}.$$

Здесь $n!$ есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, т.е., $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ и т.д.

Решение. Очевидно, $\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$. Представляя по этой формуле все слагаемые

суммы, находим, что эта сумма равна $1 - \frac{1}{10!} > 1 - 10^{-5} = 0,99999$. Поэтому пятая цифра после запятой в ее десятичной записи есть 9.

Ответ. 9